Maths 104 CC05 VEN 21/10/2022
30 min Calculatrice mode EXAM

<u>Exercice 1</u> [7 points]

La parabole $\mathcal{P}$ représentative d'une certaine fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ admet pour sommet $S(4\,;1)$ et passe par $A(6\,;\,-3)$.

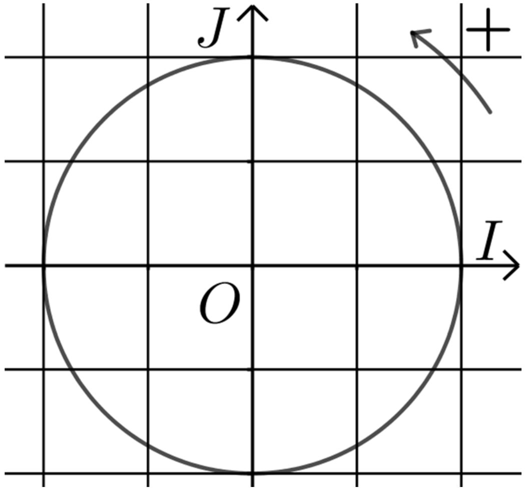
• déterminer la forme canonique de $f(x)$

• vérifier que, pour tout réel x, on a : $f(x) = -x^2 + 8x - 15$

• la parabole $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points : déterminer les abscisses de ces points.

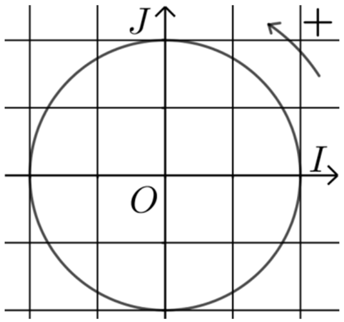
Exercice 2 [2 points]

Placer sur le cercle trigonométrique le point A image de $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et le point B image de $\frac{2\pi}{3}$:



Exercice 3 [4 points]

Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Exercice 4 [7 points]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$2\cos^2 x - 9\cos x + 4 = 0$$

Corrigé

Exercice 1

La parabole représentative d'une certaine fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ admet pour sommet $S(4\,;1)$ et passe par $A(6\,;\,-3)$.

• déterminer la forme canonique de $f(x)$

Le sommet S a pour coordonnées $x_S = 4$ et $y_S = 1$, or avec les notations du cours $S(\alpha\,;\beta)$ donc : $x_S = 4$ et $y_S = 1$.

Par ailleurs, la forme canonique s'écrit : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Donc, pour tout réel x : $f(x) = a(x-4)^2 + 1$.

Or, on sait que $A(6\,;\,-3)$ appartient à la parabole représentative de f donc $f(6) = -3$, ce qui s'écrit :

$$a(6-4)^2 + 1 = -3 \Leftrightarrow a \times (2)^2 + 1 = -3$$
$$\Leftrightarrow a \times 4 + 1 = -3 \Leftrightarrow 4a = -4 \Leftrightarrow a = -1$$

Finalement, la forme canonique de $f(x)$ est :

$$f(x) = -(x-4)^2 + 1$$

• vérifier que, pour tout réel x, on a : $f(x) = -x^2 + 8x - 15$

Développons la forme canonique de $f(x)$:

$$\begin{aligned} &f(x) \\ &= -(x-4)^2 + 1 \\ &= -(x^2 - 8x + 16) + 1 \\ &= -x^2 + 8x - 16 + 1 \\ &= -x^2 + 8x - 15 \end{aligned}$$

On a donc bien, pour tout réel x : $f(x) = -x^2 + 8x - 15$.

• la parabole $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points : déterminer les abscisses de ces points

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$:

$-x^2 + 8x - 15 = 0$ est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -1$, $b = 8$ et $c = -15$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-1)(-15) = 64 - 60 = 4$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-\sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-8-2}{-2} = \frac{-10}{-2} = +5$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+\sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-8+2}{-2} = \frac{-6}{-2} = +3$$

Les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses ont pour abscisses respectives : 3 et 5.

Autre solution

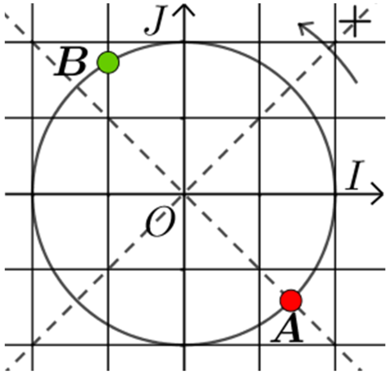
Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, qui s'écrit aussi, en utilisant la forme canonique de $f(x)$:

$$\begin{aligned} &-(x-4)^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 1^2 - (x-4)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow [1 + (x-4)][1 - (x-4)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 + x - 4)(1 - x + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(-x+5) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 3 = 0 \ \ ou \ \ -x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \ \ ou \ \ -x = -5 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \ \ ou \ \ x = 5 \end{aligned}$$

Les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses ont pour abscisses respectives : 3 et 5.

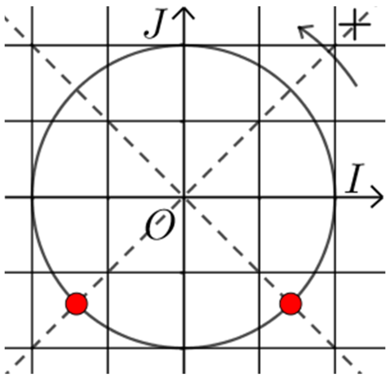
Exercice 2

Placer sur le cercle trigonométrique le point A image de $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et le point B image de $\frac{2\pi}{3}$.



Exercice 3

Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Il y a deux points sur le cercle trigonométrique ayant pour ordonnée $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Les réels de $[0\,;2\pi[$ ayant l'un de ces points pour image sont : $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$

$$S_{[0\,;2\pi[} = \left\{\frac{5\pi}{4}\,;\frac{7\pi}{4}\right\}$$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2\cos^2 x - 9\cos x + 4 = 0$.

En posant $X = \cos x$, l'équation devient : $2X^2 - 9X + 4 = 0$, qui est de la forme $aX^2 + bX + c = 0$ avec $a = 2$, $b = -9$ et $c = 4$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(2)(4) = 81 - 32 = 49$$

$\Delta > 0$ donc l'équation en X admet deux solutions réelles distinctes :

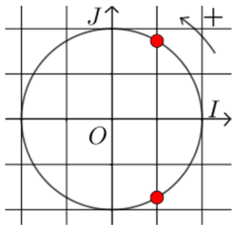
$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9-\sqrt{49}}{2(2)} = \frac{9-7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9+\sqrt{49}}{2(2)} = \frac{9+7}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

On a donc :

$$X = \frac{1}{2} \qquad ou \qquad X = 4$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$



$$x = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$$

ou

$$x = -\frac{\pi}{3} + k' \times 2\pi$$

$$\cos x = 4$$

Or, pour tout réel x :

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

donc l'équation $\cos x = 4$ est « impossible »
(*elle n'admet pas de solution réelle*).

Finalement : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}\right\}$.